

高精度曲面建模与实时空间模拟

岳天祥 杜正平 宋敦江

(中国科学院地理科学与资源研究所, 北京 100101)

摘要 为了弥补地理信息系统不能进行实时动态模拟的缺陷,通过QR矩阵分解,将高精度曲面建模HASM4的矩阵表达转换为求解系数矩阵为上三角矩阵和下三角矩阵的两个方程组。在此基础上,实时空间模拟问题被抽象为动态加点问题和动态减点问题,建立了适用于实时模拟的HASM5。数值实验结果表明,HASM5的加点模拟只需要对新采样点形成的矩阵进行矩阵分解;而HASM5的减点模拟只需要取原有矩阵的子矩阵计算即可。

关键词 高精度曲面建模 实时空间模拟 动态加点 动态减点 数值实验

中图分类号: TP391 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2007)09-1659-06

High Accuracy Surface Modeling and Spatial Real-time Simulation

YUE Tian-xiang, DU Zheng-ping, SONG Dun-jiang

(Institute of Geographical Sciences and Natural Resources Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101)

Abstract HASM5 is developed in the context that the current generation of geographical information system (GIS) is difficult to realize real-time simulation. HASM5 is developed on the basis of QR decomposition and the spatial real-time simulation is realized by dynamically adding information points and reducing information points. The QR decomposition method is used to transform the matrix of HASM4 into two algebra equations including two coefficient matrixes that are respectively one upper triangular matrix and one lower triangular matrix. Numerical tests show that the spatial real-time simulation by dynamically adding information points only needs to conduct the matrix decomposition to the matrix formed by adding information points. The spatial real-time simulation by dynamically reducing information points only needs to calculate sub-matrix of the matrix before reducing information points.

Keywords high accuracy surface modelling, spatial real-time simulation, dynamically adding information points, dynamically reducing information points, numerical test

1 引言

时间可表征为自然时一空4维空间的第4维^[1]。静态对象可定义为在短时期内不变化的对象。地理信息系统一般处理的是静态信息。然而,在许多情况下,地理信息系统需要处理的信息是动态变化的,往往需要对静态信息和动态信息进行融合。

实时(real-time)指事件发生时的片刻瞬间。一般情况下,信息的实时更新是不可能的,都会有一些拖延。一个实时系统的可接受拖延时间长短取决于过

程的动态性和决策的时间阈值。虽然当代地理信息系统软件还没有实时功能,但随着计算机技术的迅速发展,实时空间分析和实时数据可视化已势在必行^[2]。

有关研究表明^[3,4],地理信息系统是作为制图工具逐渐发展起来的产物,注重静态内容的表达,忽视了动态描述^[5]。也就是说,虽然地理信息系统具有较强的空间分析、图层叠合和空间数据存贮能力^[6],但缺乏表达实时动态的能力。

本文拟在高精度曲面建模最佳表达HASM4的基础上^[7-13],发展其实时空模拟功能,弥补地理信息系统(GIS)实时动态表达的缺陷。

基金项目:中国科学院知识创新工程重要方向项目(kzcx2-yw-429);国家高技术研究发展计划项目(2006AA12Z219);国家重点基础研究发展规划项目(2002CB412506)

收稿日期:2005-12-28;改回日期:2006-03-24

第一作者简介:岳天祥(1963~),男,首席研究员,博士生导师。主要从事高精度曲面建模与空间实时模拟研究。E-mail: Yue@lreis.ac.cn

2 HASM4

实时模拟问题在数学上可理解为动态加点和减点问题。运用 HASM4 对曲面 $(x, y, f(x, y))$ 进行数值模拟时,需要先利用采样值通过插值数值得到微分基本量,然后通过差分离散 HASM4 进行迭代^[11,13],其迭代方程被表达为

$$\frac{f_{i+1,j}^{(n+1)} - f_{i,j}^{(n+1)} - f_{i,j}^{(n+1)} - f_{i-1,j}^{(n+1)}}{hx_{i+1} - hx_i} = (\Gamma_{11}^1)_{i,j} \frac{f_{i+1,j}^{(n)} - f_{i-1,j}^{(n)}}{hx_i + hx_{i+1}} + (\Gamma_{11}^2)_{i,j} \frac{f_{i,j+1}^{(n)} - f_{i,j-1}^{(n)}}{hy_j + hy_{j+1}} + \frac{L_{i,j}^{(n)}}{\sqrt{E_{i,j}^{(n)} + G_{i,j}^{(n)} - 1}} \quad (1)$$

$$\frac{f_{i+1,j}^{(n+1)} - f_{i,j}^{(n+1)} - f_{i,j}^{(n+1)} - f_{i,j-1}^{(n+1)}}{hy_{j+1} - hy_j} = (\Gamma_{22}^1)_{i,j} \frac{f_{i+1,j}^{(n)} - f_{i-1,j}^{(n)}}{hx_j + hx_{j+1}} + (\Gamma_{22}^2)_{i,j} \frac{f_{i,j+1}^{(n)} - f_{i,j-1}^{(n)}}{hy_i + hy_{i+1}} + \frac{N_{i,j}^{(n)}}{\sqrt{E_{i,j}^{(n)} + G_{i,j}^{(n)} - 1}} \quad (2)$$

$$(x_i, y_j) \in \Omega \setminus \partial\Omega \quad (3)$$

若计算步长为 $H_x = (hx_1, hx_2, \dots, hx_i, hx_{i+1})^T$, $H_y = (hy_1, hy_2, \dots, hy_j, hy_{j+1})^T$, 模拟区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 则一共有 $(I+2) \cdot (J+2)$ 个网格点,除去边界网格点,需要求解的内部网格点为 IJ 个。

对 $n \geq 1$, 设 $F^{(n)} = (f_{1,1}^{(n)}, f_{1,2}^{(n)}, \dots, f_{1,j}^{(n)}, f_{2,1}^{(n)}, \dots, f_{i-1,j}^{(n)}, f_{i,1}^{(n)}, \dots, f_{i,j-1}^{(n)}, f_{i,j}^{(n)})^T$, $F^{(0)}$ 为插值模拟得到的结果,则 Gauss 方程的差分迭代方程组可以用矩阵表示为

$$\begin{cases} AF^{(n+1)} = D^{(n)} \\ BF^{(n+1)} = E^{(n)} \end{cases} \quad (4)$$

设 $H = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, $Q^{(n)} = \begin{bmatrix} D^{(n)} \\ E^{(n)} \end{bmatrix}$, 为了保证在采样点的模拟值等于采样值,把问题转化为等式约束的最小二乘问题:

$$\begin{cases} \min \|HF^{(n+1)} - Q^{(n)}\|_2 \\ \text{s.t. } CF^{(n+1)} = G \end{cases} \quad (5)$$

其中, $H \in \mathbb{R}^{(2ws) \times ws}$, $Q^{(n)} \in \mathbb{R}^{(2ws) \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{wt \times ws}$, $G \in \mathbb{R}^{wt \times 1}$, $ws = IJ$ 为计算网格内部点数, wt 为采样点数。

为了表述简单,这里采用均匀网格, $H_x = H_y = C$ 和 G 分别为采样矩阵和采样值。如果 $(x_i, y_j, \bar{f}_{i,j})$ 为第 k 个采样点的坐标和采样值,则 $C(k, (i-1) \cdot J + j) = 1, G(k) = \bar{f}_{i,j}$ 。式(5)采取等式约束的最小二乘方法处理可使采样点模拟值等于采样值的前提

下,其他点的模拟误差最小。

在 HASM4 中,对上述等式约束的最小二乘问题,采用近似处理方法,即对充分大的参数 ε ,解无约束的最小二乘问题,

$$\min_{F'} \left\| \begin{bmatrix} H \\ \varepsilon C \end{bmatrix} F^{(n+1)} - \begin{bmatrix} Q^{(n)} \\ \varepsilon G \end{bmatrix} \right\|_2 \quad (6)$$

这样处理比较方便,但对动态加点或动态减点采样则不实用,因为按照这一方法处理,每加减采样点,都需要对系数矩阵进行完全重新计算,计算量比较大。因此,对动态采样问题,需要另外寻求方法,这里,采用矩阵分解方法^[14,15]来处理,并将其命名为 HASM5。

3 HASM5

由代数方程组(4)的系数矩阵和采样矩阵的结构不难发现,最小二乘问题式(5)满足有解的充要条件 $\text{rank}(C) = wt$, 且 $\text{rank}([\begin{smallmatrix} H^T & C^T \end{smallmatrix}]^T) = ws$ 。式(5)等价于

$$\begin{cases} \min ((F^{(n+1)})^T H^T H F^{(n+1)} - 2(Q^{(n)})^T H F^{(n+1)} + (Q^{(n)})^T Q^{(n)}) \\ \text{s.t. } CF^{(n+1)} = G \end{cases} \quad (7)$$

利用 Kuhn-Tucker 条件,引入参数 λ ,将问题转化为确定 $F^{(n+1)} \in \mathbb{R}^{ws}, \lambda \in \mathbb{R}^{wt}$ 满足:

$$\begin{cases} H^T H F^{(n+1)} - H^T Q^{(n)} = C^T \lambda \\ CF^{(n+1)} = G \end{cases} \quad (8)$$

即

$$\begin{bmatrix} H^T H & -C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{(n+1)} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T Q^{(n)} \\ G \end{bmatrix} \quad (9)$$

如果 $\text{rank}(C) = wt, \text{rank}([\begin{smallmatrix} H^T & C^T \end{smallmatrix}]^T) = ws$ 成立,则可对上述代数方程组进行如下分解:

$$\begin{bmatrix} L_N & 0 \\ K & L_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_N^T & -K^T \\ 0 & L_C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{(n+1)} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T Q^{(n)} \\ G \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中, $L_N \in \mathbb{R}^{ws \times ws}, L_C \in \mathbb{R}^{wt \times wt}$ 为下三角矩阵, $K \in \mathbb{R}^{ws \times wt}$, 3 个矩阵待定。在此基础上,可以通过求解如下的下三角和上三角方程组得到 $F^{(n+1)}$,

$$\begin{bmatrix} L_N & 0 \\ K & L_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T Q^{(n)} \\ G \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} L_N^T & -K^T \\ 0 & L_C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{(n+1)} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

求解步骤为

- (1) $L_N y_1 = H^T Q^{(n)}$;
- (2) $L_C y_2 = G - K y_1$;

(3) $L_H^T \lambda = y_2$;

(4) $L_H^T F^{(n+1)} = y_1 + K^T \lambda$ 。依次可以解出 y_1 、 y_2 、 λ 和 $F^{(n+1)}$ 。

3.1 矩阵分解问题

由矩阵乘法可知,

$$\begin{bmatrix} H^T H & -C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_H & 0 \\ K & L_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_H^T & -K^T \\ 0 & L_C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_H L_H^T & -L K^T \\ K L_H^T & L_C L_C^T - K K^T \end{bmatrix} \quad (12)$$

即 $H^T H = L_H L_H^T$, $C = K L_H^T$, $L_C L_C^T = K K^T$ 。 L_H 为对称正定矩阵 $H^T H$ 的 Cholesky 因子, 而 $K = C(L_H^T)^{-1}$ 。由于 K 为行满秩矩阵, 故 $K K^T$ 为正定阵, 此时存在下三角矩阵 $L_C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 使得 $L_C L_C^T = K K^T$ 。依次求出 L_H , K 和 L_C , 也就完成了对矩阵 $\begin{bmatrix} H^T H & -C^T \\ C & 0 \end{bmatrix}$ 的三角分解。

实际计算时, 先对 H 做 QR 分解, 即 $H = Q_{2ws} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$, 其中 Q_{2ws} 为 $(2ws) \times (2ws)$ 大小的直交矩阵, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为主对角元均大于 0 的上三角矩阵。取 $L_H = R^T$, 则 $L_H L_H^T = R^T R = R^T Q_{2ws}^T Q_{2ws} R = [R^T R_{2ws}^T \ 0] \begin{bmatrix} Q_{2ws} R \\ 0 \end{bmatrix} = H^T H$, 即 L_H 满足 $L_H L_H^T = H^T H$ 。

综上所述, 式(5)的计算步骤为

- (1) 对 H 进行 QR 分解, 得到 R , 取 $L_H = R^T$;
- (2) $K = C(L_H^T)^{-1}$;
- (3) 求 L_C 使得 $L_C L_C^T = K K^T$;
- (4) 分别求解三角型代数方程组

$$\begin{bmatrix} L_H & 0 \\ K & L_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T Q^{(n)} \\ G \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} L_H^T & -K^T \\ 0 & L_C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{(n+1)} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ 依次解出 } y_1, y_2, \lambda \text{ 和 } F^{(n+1)}。$$

值得注意的是, 由于 L_H 和 L_C 是下三角矩阵, 所以上述求解过程并不复杂。如果设 $K = (K_{i,j})$ 、 $C = (C_{i,j})$ 、 $L_H = (L_{i,j})$ 和 $L_C = (T_{i,j})$, 则 K 和 L_C 的具体计算方法为

$$K_{i,j} = \frac{C_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} K_{i,k} L_{j,k}}{L_{j,j}} \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, wt; j = 1, 2, \dots, ws$$

$$T_{i,j} = \frac{\sum_{k=1}^{ws} K_{i,k} K_{j,k} - \sum_{l=1}^{j-1} T_{i,l} T_{j,l}}{T_{j,j}} \quad (14)$$

$$i = 1, 2, \dots, wt; j = 1, 2, \dots, i$$

3.2 动态加点问题

考虑采样矩阵 $[C; G]$ 增加 z 行, 新的采样系数

矩阵为 $\tilde{C} = \begin{bmatrix} C \\ Z \end{bmatrix}$, 其中 $Z \in \mathbb{R}^{z \times m}$, 则

$$\tilde{K} = \tilde{C}(L_H^T)^{-1} = \begin{bmatrix} C(L_H^T)^{-1} \\ Z(L_H^T)^{-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

设 $W = Z(L_H^T)^{-1}$, 则有 $\tilde{K} \tilde{K}^T = \begin{bmatrix} K \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^T & W^T \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} K K^T & K W^T \\ W K^T & W W^T \end{bmatrix}, \text{ 而 } L_C L_C^T = K K^T, \text{ 因此可以设 } \tilde{K} \tilde{K}^T = \begin{bmatrix} L_C & 0 \\ S & L_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_C^T & S^T \\ 0 & L_z^T \end{bmatrix}, \text{ 其中 } S, L_z \text{ 待定。}$$

由

$$\begin{bmatrix} K K^T & K W^T \\ W K^T & W W^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_C & 0 \\ S & L_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_C^T & S^T \\ 0 & L_z^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_C L_C^T & L_C S^T \\ S L_C^T & S S^T + L_z L_z^T \end{bmatrix}$$

可得 $S L_C^T = W K^T$, 因此可以取 $S = W K^T (L_C^T)^{-1}$, L_z^T 则可以通过 $L_z L_z^T = W W^T - S S^T$ 求得, 从而可以得到新的下三角矩阵 $\tilde{L}_C = \begin{bmatrix} L_C & 0 \\ S & L_z \end{bmatrix}$ 。随着新的采样点的加入, 更新后代数方程组的系数矩阵的分解式为

$$\begin{bmatrix} H^T H & -\tilde{C}^T \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_H & 0 \\ \tilde{K} & L_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_H^T & -\tilde{K}^T \\ 0 & \tilde{L}_C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_H & 0 & 0 \\ K & L_C & 0 \\ W & S & L_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_H^T & -K^T & -W^T \\ 0 & L_C^T & S^T \\ 0 & 0 & L_z^T \end{bmatrix} \quad (16)$$

对比原始的分解式(12), 采样点增加时只需要依次计算 3 个规模并不大的矩阵 W 、 S 和 L_z 。

3.3 动态减点问题

设需要减少 z 个采样点, 不失一般性, 假设删去

最后的 z 个采样点, $C = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ Z \end{bmatrix}$ 。其中, $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{(m-z) \times m}$, $Z \in \mathbb{R}^{z \times m}$, 设 $W = Z(L_H^T)^{-1}$, $\tilde{K} = \tilde{C}(L_H^T)^{-1}$, 则有如下等式:

$$K = C(L_H^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{C}(L_H^T)^{-1} \\ Z(L_H^T)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K} \\ W \end{bmatrix} \quad (17)$$

由于 $K K^T = \begin{bmatrix} \tilde{K} \tilde{K}^T & \tilde{K} W^T \\ W \tilde{K}^T & W W^T \end{bmatrix} = L_C L_C^T$, 设 $L_C =$

$\begin{bmatrix} \bar{L}_c & 0 \\ F & L_z \end{bmatrix}$, 其中, L_z 为下三角矩阵。则

$$\begin{aligned}
 KK^T &= L_c L_c^T = \begin{bmatrix} \bar{L}_c & 0 \\ F & L_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{L}_c^T & F^T \\ 0 & L_z^T \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \bar{L}_c \bar{L}_c^T & \bar{L}_c F^T \\ F \bar{L}_c^T & FF^T + L_z L_z^T \end{bmatrix} \quad (18)
 \end{aligned}$$

因此 $\hat{K}\hat{K}^T = \bar{L}_c \bar{L}_c^T$ 。由此可见, 当删去采样方程的后 z 行时, 则 \hat{K} 为 K 的前 $(wt-z)$ 行元素, \bar{L}_c 为 L_c 的左上角 $(wt-z) \times (wt-z)$ 主矩阵。

值得注意的是, 动态加点时, 如果追求计算速度, 对计算精度要求不高, 可以用新的分解式模拟一次即可, 如果需要提高精度, 则一般要求迭代多次。

而对于动态减点, 若需要保持精度, 则用新的分解式模拟一次即可, 这样可以更多的保留原有信息。

4 数值实验

取 $f(x, y) = (2x + y) \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + 1$ 为标准曲面, 模拟区域为 $[0 \ 1] \times [0 \ 1]$, 计算步长为 $h = \frac{1}{N}$, 迭代次数为 20 次, 随机动态加点采样分布如图 1, 其中红色采样点为初始采样点, 共 40 个, 以后每次增加 20 个采样点, 分别为洋红、黄、绿、蓝、黑。减点模拟与加点模拟的过程正好相反(如图 2)。

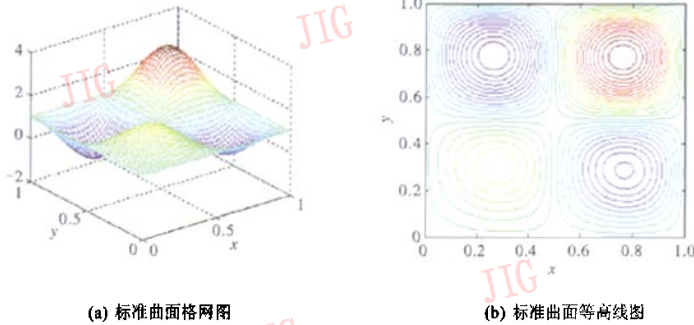


图 1 标准曲面
Fig. 1 Canonical surface

数值实验结果表明(表 1), HASM4 与 HASM5 计算精度相差不多, HASM5 由于是精确处理的, 所以精度略高。为了方便动态采样计算, HASM5 模拟过程中需要多次三角矩阵求逆, 算法要比 HASM4 复杂一些。

加点模拟是在 40 个采样点的基础上进行的, 每次加 20 个点。初始采样点为 40 个, 这时直接模拟和加点模拟计算过程一样, 计算精度一致(表 2)。由于直接模拟在每组采样点下都只迭代 20 次, 而加点模拟在同样多的采样点数下, 之前的每次加点都会迭代 20 次, 所以随着点数的增加, 加点模拟体现出精度优势。其中的“直接模拟”指直接在当时所用的采样点下进行 HASM 迭代, 用以比较动态模拟过程。

减点模拟是在 140 个采样点的基础上进行, 每次减 20 个点。初始采样点为 140 个, 这时直接模拟和减点模拟计算过程一样, 计算精度一致, 随着采样点的减少(表 3), 直接模拟的精度下降比较多, 而减

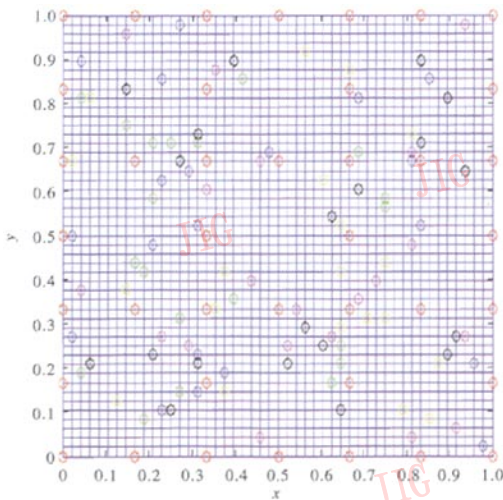


图 2 采样变化图
Fig. 2 Sampling points

表1 HASM5 和 HASM4 的模拟误差比较

Tab.1 Comparing HASM5 simulation errors with HASM4 ones

计算点数 N^2	采样点数 wt	平均绝对误差		平均相对误差	
		HASM4	HASM5	HASM4	HASM5
289	33	1.0286×10^{-2}	1.0284×10^{-2}	1.2563×10^{-2}	1.2561×10^{-2}
	63	5.0121×10^{-3}	5.0104×10^{-3}	1.5686×10^{-3}	1.5685×10^{-3}
	85	1.9443×10^{-3}	1.9439×10^{-3}	2.3456×10^{-3}	2.3454×10^{-3}
625	135	1.3123×10^{-3}	1.3120×10^{-3}	1.6161×10^{-3}	1.6103×10^{-3}
	33	1.0045×10^{-2}	1.0045×10^{-2}	2.3038×10^{-2}	2.3038×10^{-2}
1089	133	1.9638×10^{-3}	1.9635×10^{-3}	4.5956×10^{-3}	4.5948×10^{-3}
	56	3.4781×10^{-3}	3.4781×10^{-3}	6.2581×10^{-3}	6.2581×10^{-3}
1681	206	8.5491×10^{-4}	8.5484×10^{-4}	1.1954×10^{-3}	1.1954×10^{-3}
	85	1.8402×10^{-3}	1.8402×10^{-3}	2.0685×10^{-3}	2.0678×10^{-3}
2401	285	5.1545×10^{-4}	5.1541×10^{-4}	5.8231×10^{-4}	5.8210×10^{-4}

表2 动态加点模拟与直接模拟误差比较

Tab.2 Comparing errors of adding-points simulation with ones of static simulation

采样点数 wt	平均绝对误差		平均相对误差	
	直接模拟	加点模拟	直接模拟	加点模拟
40	6.0137×10^{-2}	6.0137×10^{-2}	6.1466×10^{-2}	6.1466×10^{-2}
60	1.5818×10^{-2}	1.3626×10^{-2}	2.1702×10^{-2}	1.7685×10^{-2}
80	8.9216×10^{-3}	6.9709×10^{-3}	1.4110×10^{-2}	1.0091×10^{-2}
100	5.6787×10^{-3}	4.8971×10^{-3}	1.1269×10^{-2}	7.9909×10^{-3}
120	4.5913×10^{-3}	3.7100×10^{-3}	9.9899×10^{-3}	6.6693×10^{-3}
140	3.4651×10^{-3}	2.6457×10^{-3}	5.9393×10^{-3}	3.8167×10^{-3}

表3 动态减点模拟与直接模拟误差比较

Tab.3 Comparison of errors between reducing-points simulation and static simulation

采样点数 wt	平均绝对误差		平均相对误差	
	直接模拟	减点模拟	直接模拟	减点模拟
140	3.3346×10^{-3}	3.33461×10^{-3}	5.0228×10^{-3}	5.0228×10^{-3}
120	3.9670×10^{-3}	3.35836×10^{-3}	5.6798×10^{-3}	5.0901×10^{-3}
100	5.0820×10^{-3}	3.41017×10^{-3}	6.5357×10^{-3}	5.1653×10^{-3}
80	7.7781×10^{-3}	3.49499×10^{-3}	7.4827×10^{-3}	5.1186×10^{-3}
60	1.4115×10^{-2}	3.55371×10^{-3}	1.6187×10^{-2}	5.3152×10^{-3}
40	6.0137×10^{-2}	4.01424×10^{-3}	6.1466×10^{-2}	5.4637×10^{-3}

点模拟,每次采样点减少的时候,只计算一次,并没有过多地消除采样点多时的影响,反而精度下降不多。

从理论上讲,数字曲面由采样点唯一确定。假设在一定数量的采样点的基础上,得到一个数字曲面A,然后逐步加点模拟,而后又逐步减点模拟回到原有的采样点,得到一个数字曲面B,根据数字曲面

由采样点唯一确定的理论,数字曲面A应该等同于数字曲面B。本文进行了这一数值实验,总的网格点为1089个,在21个采样点的基础上,每次增加20个采样点,逐步加点至121个采样点,而后每次减少20个采样点,直至减少到21个采样点。逐步计算所得曲面模拟的平均绝对误差和平均相对误差的自然对数值,由图3可以看到,在采样点由21个逐步

增加到 121 个而后逐步减少到 21 个的过程中,整个计算过程的误差曲线基本成对称状,这说明前后两次得到的曲面是相差无几的。

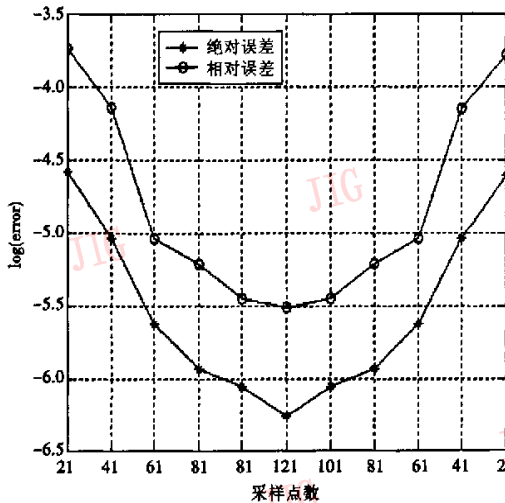


图 3 误差变化图

Fig. 3 Changes of errors with a change of sampling points

5 结论

在矩阵分解的基础上,建立了适用于实时空间模拟的 HASM5 计算方法。加点模拟时,只需要对新采样点形成的矩阵进行矩阵分解;而减点模拟时,只需要取原有矩阵的子矩阵计算即可,无论加点还是减点,计算量的变化并不大。动态加点模拟时,模拟精度随着加点的进行,表现出了很好的优势;而动态减点模拟时,很好地保持了原有采样点下的计算结果,精度下降不多。数值实验表明,HASM 可用于实时动态模拟。

参考文献 (References)

- Asproth V, Hakansson A, Revay P. Dynamic information in GIS systems[J]. *Computers, Environment and Urban Systems*, 1995, 19(2): 107 ~ 115.
- Valsecchi P, Claramunt C, Peytchev E. OSIRIS: an inter-operable system for the integration of real-time traffic data within GIS[J]. *Computers, Environment and Urban Systems*, 1999, 23(6): 245 ~ 257.
- Sun M, Xue Y, Ma A N, et al. 3D visualization of large digital elevation model (DEM) data set [A]. In: *Proceedings of Computational Science-ICCS 2002* [C], Berlin: Springer-Verlag, 2002: 975 ~ 983.
- Zerger A, Smith D I. Impediments to using GIS for real-time disaster decision support[J]. *Computers, Environment and Urban Systems*, 2003, 27: 123 ~ 141.
- Isenegger D, Price B, Wu Y, et al. IPODLAS—A software architecture for coupling temporal simulation systems, VR, and GIS [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry & Remote Sensing*, 2005, 60: 34 ~ 47.
- Nyerges T. Understanding the scope of GIS: Its relationship to environmental modeling[A]. In: *Environmental Modeling with GIS* [M], New York: Oxford University Press, 1993: 75 ~ 107.
- Yue Tian-xiang, Ai Nan-shan. The mathematic model of cirque morphology [J]. *Journal of Glaciology and Geocryology*, 1990, 12(3): 227 ~ 234. [岳天祥, 艾南山. 冰斗形态的数学模型[J]. *冰川冻土*, 1990, 12(3): 227 ~ 234.]
- Yue T X, Chen S P, Xu B, et al. A curve-theorem based approach for change detection and its application to Yellow River delta[J]. *International Journal of Remote Sensing*, 2002, 23(11): 2283 ~ 2292.
- Yue Tian-xiang, Du Zheng-ping, Liu Ji-yuan. High accuracy surface modeling (HASM2) and its error analysis[J]. *Progress in Natural Science*, 2004, 14(2): 83 ~ 89. [岳天祥, 杜正平, 刘纪远. 高精度曲面建模与误差分析[J]. *自然科学进展*, 2004, 14(2): 83 ~ 89.]
- Yue Tian-xiang, Du Zheng-ping. High accuracy surface modeling (HASM3): a key module in the new generation GIS and CAD[J]. *Progress in Natural Science*, 2005, 15(3): 73 ~ 82. [岳天祥, 杜正平. 高精度曲面建模: 新一代 GIS 与 CAD 的核心模块[J]. *自然科学进展*, 2005, 15(3): 73 ~ 82.]
- Yue Tian-xiang, Du Zheng-ping. High accuracy surface modeling (HASM4) and comparative analysis of its errors[J]. *Progress in Natural Science*, 2006, 16(8): 986 ~ 991. [岳天祥, 杜正平. 高精度曲面建模与经典模型的误差比较分析[J]. *自然科学进展*, 2006, 16(8): 986 ~ 991.]
- Yue Tian-xiang, Du Zheng-ping, Song Dun-jiang. High accuracy surface modeling (HASM4) [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2007, 11(2): 343 ~ 348. [岳天祥, 杜正平, 宋敦江. 高精度曲面建模 (HASM4) [J]. *中国图象图形学报*, 2007, 11(2): 343 ~ 348.]
- Yue Tian-xiang, Du Zheng-ping. Numerical test for optimum formulation of high accuracy surface modeling[J]. *Geo-Information Science*, 2006, 8(3): 83 ~ 87. [岳天祥, 杜正平. 高精度曲面建模数值实验分析[J]. *地球信息科学进展*, 2006, 8(3): 83 ~ 87.]
- Zhao Jin-xi. Matrix updating method for the constrained and weighted linear least squares problems [J]. *Journal of Computational Mathematics of Chinese Universities*, 1996, 18(2): 92 ~ 103. [赵金熙. 解等式约束加权线性最小二乘问题的矩阵校正法[J]. *高等学校计算数学学报*, 1996, 18(2): 92 ~ 103.]
- Gulliksson M E, Wedin P A. Modifying the QR decomposition to weighted and constrained linear least squares[J]. *SIAM J. Matrix Anal Appl*, 1992, 13: 1298 ~ 1313.]